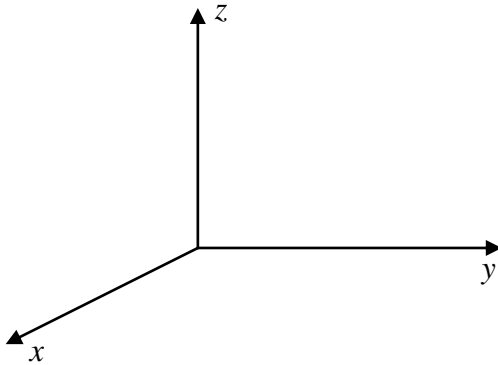




فضا:



مثال ۱: دو نقطه‌ی $A = (1, 2, 3)$ و $B = (3, 4, -2)$ را در دو دستگاه راستگرد نمایش دهید.

نکته:

- | | |
|--|---|
| = تصویر نقطه‌ی $A = (x, y, z)$ بر محور x ها | = قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی xoy |
| = تصویر نقطه‌ی $A = (x, y, z)$ بر محور y ها | = قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی xoz |
| = تصویر نقطه‌ی $A = (x, y, z)$ بر محور z ها | = قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی yoz |
| = تصویر نقطه‌ی $A = (x, y, z)$ بر صفحه‌ی xoy | = قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور x ها |
| = تصویر نقطه‌ی $A = (x, y, z)$ بر صفحه‌ی yoz | = قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور y ها |
| = تصویر نقطه‌ی $A = (x, y, z)$ بر صفحه‌ی xoz | = قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور z ها |
| | = قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات |



= قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی $y=x$

= فاصله‌ی A از مبدأ مختصات

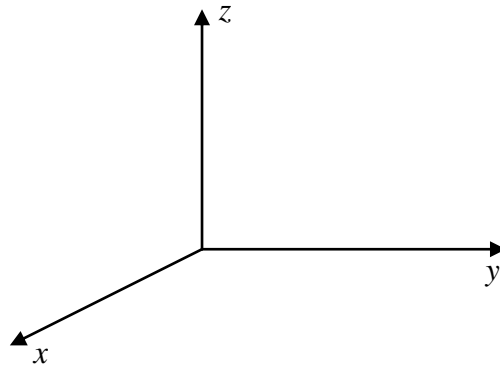
= قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی $y=-x$

= قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی $y=z$

= قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی $y=-z$

= قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی $x=z$

= قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به صفحه‌ی $x=-z$



= فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xoy

= فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور z ها

= فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی yoz

= فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور y ها

= فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xoz

= فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور x ها

مثال ۲: نقطه‌ی A' قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (1, 2, 3)$ نسبت به صفحه‌ی xoy و نقطه‌ی A'' تصویر نقطه‌ی A' بر محور oz است؛
مطلوبست مختصات A'' ؟

مثال ۳: فاصله‌ی نقطه‌ی $A = (1, -4, 3)$ از صفحه‌ی xoz را بدست آورید؟

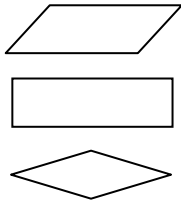
مثال ۴: چند نقطه روی محور z ها وجود دارد که از نقطه‌ی $A = (1, 2, 3)$ به فاصله‌ی ۱ باشند؟

مثال ۵: در مثال ۴ فاصله را $\sqrt{5}$ در نظر بگیرید؟

مثال ۶: در مثال ۴ فاصله را ۵ در نظر بگیرید؟



M وسط پاره خط AB



یادآوری از هندسه ۱:

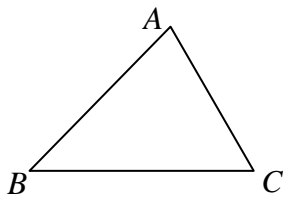
متوازی الاضلاع

مستطیل

لوزی

$M =$ نقطه‌ی تلاقی اقطار متوازی اضلاع $ABCD$

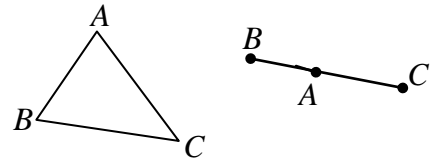
یادآوری از هندسه ۱: مرکز ثقل مثلث



$G =$ مرکز ثقل مثلث ABC

طول پاره خط AB :

- نکته:
- ۱)
 - ۲)
 - ۳)



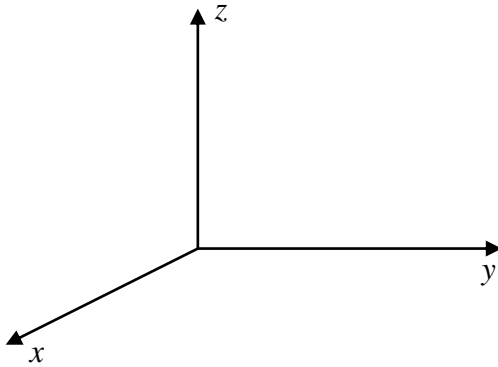
مثال ۷: نقاط $A(2, 0, 5)$ و $B(4, -6, 1)$ و $C(0, 2, -11)$ رؤوس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند مطلوبست مختصات رأس D و مرکز تقارن متوازی الاضلاع؟

مثال ۸: نوع مثلثی که مختصات رؤوس آن $A = (4, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$, $C = (0, 0, 4)$ باشند را مشخص نمایید؟ (آزاد ۶۶)



پیکان:

بردار:



مؤلفه های بردار:

طول بردار:

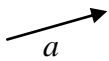
نکته:

مؤلفه های پیکان:

طول پیکان:

اعمال روی بردارها:

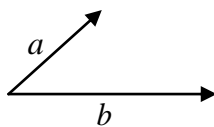
(۱) ضرب عدد حقیقی در بردار:



مثال ۹: اگر $a = (-1, 2, 5)$, $r = 3$ مطلوب است ra ؟

نکته:

(۲) جمع دو بردار



(۳) تفاضل دو بردار



مثال ۱۰: اگر $a = (2, -1, 5)$, $b = (4, 0, 11)$ باشند مطلوبست $2a - 3b$ ؟

مثال ۱۱: در مستطیل $ABCD$ حاصل $CA + DB$ کدام است؟ (آزاد ۷۶)

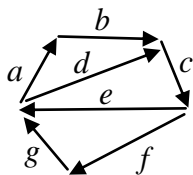
- (۱) $2BC$ (۲) O (۳) $2DA$ (۴) $2AB$

مثال ۱۲: اگر دو بردار $V_1 = (2, 1, m+1)$, $V_2 = (-1, 2k, 1)$ موازی باشند، آن گاه m , k را بدست آورید؟ (آزاد ۷۶)

مثال ۱۳: دو نقطه $A = (4, 0, 3)$, $B = (1, 3, 0)$ مفروضند اگر نقطه $M = (x, y, z)$ باشد و $MA = 2MB$ مطلوبست مجموع مختصه های نقطه M (یعنی $x+y+z$) ؟

مثال ۱۴: اگر بردار $a = (m, 2, -1)$, $|b| = \sqrt{41}$ و دو بردار $a+b$, $a-b$ عمود برهم باشند، m را بیابید؟ (سراسری ۸۵)

مثال ۱۵: در شکل زیر برآیند همه بردارهای موجود با کدام بردار برابر است؟ (المپیاد بلژیک ۱۹۷۸)



- (۱) e (۲) $-e$
(۳) $-c$ (۴) c



مثال ۱۶: دو بردار با طول مساوی ۶ واحد با محور x زاویه 47° ، 81° می سازند. زاویه ی جمع دو بردار با محور x ها چند درجه است؟ (آزاد ۷۶ - سنجش ۸۳)

مثال ۱۷: در $\triangle ABC$ ، نقطه ی G محل برخورد میانه هاست. حاصل $GA + GB$ برابرست با: (آزاد ۷۷ - سنجش ۸۴)

- (۱) CG (۲) GC (۳) rGC (۴) $-3GC$

مثال ۱۸: اگر $V_1 = 2i + 3j + k$ ، $V_2 = i - j + k$ باشد حاصل $\frac{|V_1 - 2V_2|}{|V_1 + 2V_2|}$ را بدست آورید؟ (آزاد ۸۱)

بردارهای یکه (واحد یکانی)

نکته:

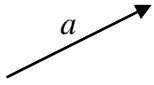
مثال ۱۹: اگر $a = (-5, 1, 3)$ باشد می توان نوشت:

بردار یکه (واحد یکانی):

مثال ۲۰: $a = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$

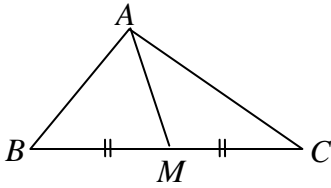


بردار جهت (برداریکه) نظیر بردار a :

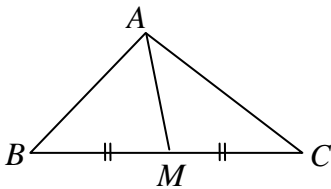


مثال ۲۱: بردار جهت نظیر بردار a را بنویسید ، $a = (-۲, ۴, -۱)$.

نکته:



نکته:





مثال ۲۲: نقطه‌ی $A = (2, -1, 3)$ مفروض است اگر A' قرینه‌ی A نسبت به صفحه xoy و A'' قرینه‌ی A' نسبت به عمود oz باشد مطلوبست طول و مؤلفه‌های $A'A''$.

مثال ۲۳: اگر $A = (5, 2, -1)$ ، $B = (6, 3, 0)$ ، $C = (-4, 1, 8)$ سه رأس مثلث $\triangle ABC$ باشند مطلوبست طول میانه‌ی AM ؟

مثال ۲۴: اگر $A = (1, 2, 3)$ ، $M = (3, 4, -1)$ ، $G = (9, 0, 2)$ به ترتیب یک رأس، پای میانه CM و مرکز ثقل مثلث $\triangle ABC$ باشد مطلوبست مختصات رئوس B ، C از $\triangle ABC$ ؟

مثال ۲۵: اگر M وسط ضلع BC از چهارضلعی $ABCD$ باشد حاصل عبارت $AD-BA-CD$ کدام است؟

۱) $2AM$ ۲) AM

۳) $3AM$ ۴) MA

مثال ۲۶: اگر $a = (1, m, -2)$ ، $e_a = \left(\frac{1}{4}, n, k\right)$ باشد n را بدست آورید؟



«تست های نمونه ۱»

۱- اگر نقطه‌ی $A = (m+1, 1-m^2, 2m)$ روی محور z ها باشد مقدار m کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲- نقطه‌ی $A(2-a, a^2-9, a)$ روی صفحه‌ی xoy قرار دارد a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳- کدام یک از موارد زیر نیمساز \hat{xoz} را نشان می دهد؟

$$\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} (1) \quad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} (2) \quad \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases} (3) \quad \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases} (4)$$

۴- اگر قرینه‌ی $A(2-a, b, 7)$ نسبت به محور oz نقطه‌ی $A'(5, -7, c+2)$ باشد مقدار $2a-b+c$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵- اگر A' قرینه‌ی $A(-3, 5, -9)$ نسبت به صفحه‌ی xoy باشد مجموع مختصات A' کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۱ (۴)

۶- اگر قرینه‌ی $A(a, -2, 3)$ نسبت به صفحه‌ی $y-z=0$ نقطه‌ی $A'(5, b, c)$ باشد مقدار $2a+b-c$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۳ (۲) ۱۱ (۳) ۱۱ (۴)

۷- اگر $A(3, -1, 5)$, $B(-7, 3, -1)$ دوسر قطر مکعبی باشند مجموع مختصات مرکز آن کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $M = (a, a-1, a+1)$ از محور x ها $\sqrt{10}$ باشد مجموع مختصات M کدام است؟

- ۶ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴)

۹- محیط مثلثی که مختصات ۳ رأس آن $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 3)$ است چقدر است؟

- ۹ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

۱۰- اگر $A(0, 1, 0)$, $B(3, -2, -1)$, $C(-1, 0, 5)$ سه رأس مثلثی باشند طول میانه‌ی AM کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۱۱- اگر $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, -1)$, $C(0, 4, -2)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند مجموع مختصات رأس چهارم

را بدست آورید؟

- ۱۰ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

۱۲- اگر $a = 2i - 3j - k$ ؛ اندازه‌ی تصویر آن روی محور y ها کدام است؟

- ۳ (۱) ۳ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴)



۱۳- اگر اندازه‌ی بردار $a = (m-1)i - 2j - k$ مساوی ۳ باشد m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴- اگر اندازه‌ی تصویر بردار $(a, a+1, -7)$ روی صفحه‌ی xoy مساوی ۵ باشد مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۵- اگر دو بردار a, b با هم زاویه‌ی 58° بسازند بردار $u = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$ با بردار a کدام زاویه را می‌سازد؟

- (۱) 28° (۲) 29° (۳) 30° (۴) 36°

۱۶- اگر $a = i + k, b = -2i + 2j$ باشد کدام بردار نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای a, b است؟

- (۱) $j+k$ (۲) $j-k$ (۳) $-j+k$ (۴) $-j-k$

۱۷- زاویه‌ی بین دو بردار $u_1 = |b|a + |a|b, u_2 = \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|}$ چند درجه است؟

- (۱) 90° (۲) صفر (۳) 30° (۴) 60°

۱۸- زاویه‌ی بین دو بردار $u_1 = |a|b - |b|a, u_2 = \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|}$ چند درجه است؟

- (۱) 0° (۲) 90° (۳) 180° (۴) 60°

۱۹- زاویه‌ی بین دو بردار $u_1 = \left(x, -\frac{1}{x}, 3\right), u_2 = (-4, 1, -6)$ مساوی 180° است مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۲۰- مبدأ مختصات مرکز ثقل $\triangle ABC$ است و $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$ مختصات C کدام است؟

- (۱) $(-1, 0, -1)$ (۲) $(-1, -1, 0)$ (۳) $(0, -1, -1)$ (۴) $(-1, -1, -1)$

۲۱- اگر بردار $a = (-m, 2m, m-1)$ یکه بوده و با هیچ کدام از صفحات مختصات موازی نباشد مقدار m کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۲- بردار یکه همراستای بردار $i + j + k$ کدام است؟

- (۱) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

- (۳) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (۴) هیچ کدام



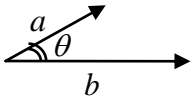
ای فرزند آدم... بنگی کن هرچه من نیاز مندی

و گناه کن هرچه بر آتش شکیبایی





۴) ضرب داخلی (نقطه ای ، اسکالر ، عددی) دو بردار a, b :



نکته مهم:

ویژگی های ضرب داخلی:

۱)

۲)

۳)

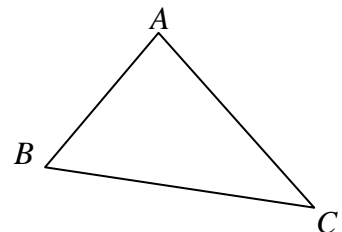
۴)

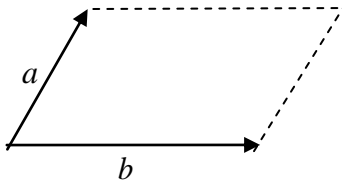
۵)

۶)

۷)

قضیه (قضیه ی کسینوس ها):





۱۰)

۱۱)

قضیه ۲:

مثال ۲۷: اگر $a = (2, -1, 5)$, $b = (-3, 4, 1)$ باشد مطلوبست حاصل ضرب داخلی آن‌ها؟

زاویه ی بین دو بردار (۱۲)

مثال ۲۸: در مثال قبل زاویه ی بین دو بردار a, b را بیابید؟

مثال ۲۹: اگر اندازه ی دو بردار $V_1 = 2i + (a+1)j + 4k$, $V_2 = ai + 4j + 3k$ برابر باشد، کسینوس زاویه ی بین دو بردار

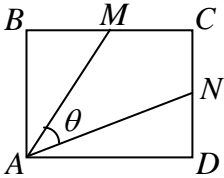
چقدر است؟ (آزاد ۸۱)



مثال ۳۰: اگر $a = 2i + 3j + k$, $b = i - j + k$ باشد زاویه ی بین دو بردار $a - b$, b را بیابید؟ (سراسری ۸۱)

مثال ۳۱: در شکل روبرو $ABCD$ مربع است. اگر M , N اوساط اضلاع باشند $\sin \theta$ کدام است؟ (المپیاد بلژیک ۱۹۸۷)

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$



مثال ۳۲: دو بردار $V_1 = (4, 5, n)$, $V_2 = (2, m, 3)$ برهم عمودند ؛ m , n را بیابید؟ (آزاد ۶۸)

مثال ۳۳: اگر a , b , c سه بردار غیرصفر باشند و زاویه ی b , c برابر 30° باشد و $a \cdot b = a \cdot c$ آن گاه:

- (۱) $b = c$ (۲) $a \parallel (b - c)$ (۳) $a = b - c$ (۴) $a \perp (b - c)$



مثال ۳۴: سه بردار غیر صفر و نابرابر c, b, a در یک صفحه به صورتی قرار دارند که $a \perp (b-c), b \perp (c-a)$

در اینصورت: (المپیاد بلژیک ۱۹۹۰)

$$(1) \quad c \perp a - b \quad (2) \quad (a+b) \perp (a-c)$$

$$(3) \quad (b+a) \perp c \quad (4) \quad a \perp b$$

مثال ۳۵: اگر $|a| = 2\sqrt{6}$ ، $|b| = 5$ ، $a \cdot b = 0$ اندازه ی بردار $a-b$ را بیابید؟ (سراسری ۸۱)

$$(1) \quad 3$$

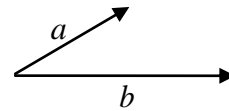
$$(2) \quad 4$$

$$(3) \quad 6$$

$$(4) \quad 7$$

۱۳) تصویر بردار a بر بردار b :

۱۴) قرینه بردار a نسبت به b :



مثال ۳۶: اگر $a = (1, 2, 3)$ ، $b = (-2, -1, 2)$ باشد مطلوبست تصویر a بر b و قرینه ی a نسبت به b ؟

مثال ۳۷: بردارهای a, b به صورت زیر مفروضند مطلوبست قرینه ی a نسبت به b ؟ $a = (5, -2, 3)$ ، $b = (-7, 0, 0)$

مثال ۳۸: بردارهای a, b به صورت زیر مفروضند مطلوبست اندازه ی قرینه ی a نسبت به b ؟

$$a = (2\sqrt{2}, -2, 2)$$

$$b = \left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{101}}{14}, \frac{\sqrt{5}}{-11}, \sqrt{\frac{2}{17}} \right)$$

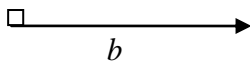


مثال ۳۹: اندازه ی تصویر $a = (1, 2, 2)$ بر بردار $b = (2, 1, 2)$ را بدست آورید؟ (آزاد ۷۵)

مثال ۴۰: طول تصویر پاره خط AB که در آن $A(1, 2, 3)$, $B(5, 5, 1)$ است بر صفحه xOy کدام است؟ (آزاد ۷۷)

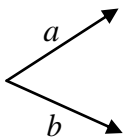
۵ (۱) $\sqrt{29}$ (۲)

۷ (۳) ۹ (۴)



۱۵)

۱۶)



۱۷)

۱۸)

: نامساوی کوشی - شوارتز (۱۹)



مثال ۴۱: اگر $-2x + y + 2z = -3$ باشد مطلوبست کمترین مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ ؟

مثال ۴۲: اگر $3x + 2y - z = 12$ باشد مطلوبست کمترین مقدار $6x^2 + 4y^2 + z^2$ ؟

مثال ۴۳: بردارهای $a = (5, -2, 0)$, $b = (0, 0, -7)$ مفروضند مطلوبست زاویه ی بین a , b ؟

مثال ۴۴: بردارهای $a = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{19}}{-5}\right)$, $b = \left(-9, \sqrt{3}, \frac{125}{13}\right)$ مفروضند مطلوبست زاویه ی بین بردارهای $e_a - e_b$, $e_a + e_b$ ؟

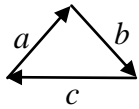
مثال ۴۵: اگر زاویه ی بین بردارهای a , b برابر 29° باشد مطلوبست زاویه ی بین بردارهای a , $e_a + e_b$.

مثال ۴۶: زاویه ی بین دو بردار a , b برابر 60° , $|a| = 2|b|$ زاویه ی بین دو بردار a , $a-b$ را بدست آورید؟ (سراسری ۷۸)



مثال ۴۷: اگر بردارهای $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$ هر دو بردار V_2 عمود باشد و سه بردار هم صفحه باشند و $|V_1| = 4$, $|V_2| = 3$ حاصل ضرب داخلی $(V_1 - V_2) \cdot (V_1 + V_2)$ چقدر است؟ (آزاد ۸۲)

مثال ۴۸: در شکل مقابل اندازه‌ی بردارهای a , b , c به ترتیب ۳ و ۵ و ۶ است مطلوبست $a \cdot b$ (سراسری ۸۰)



(۵) ضرب خارجی (بردار، ویکتوریل) بین دو بردار a , b :

مثال ۴۹: اگر $a(5, 7, -3)$, $b(0, 2, 1)$ باشند مطلوبست $a \times b$ ؟

نکته:



ویژگی های ضرب خارجی:

۱)

۲)

۳)

۴)

۵)

۶)

۷)

۸)

۹)

۱۰) ضرب مختلط ۳ بردار:

۱۱)

مثال ۵۰: اگر $a = \left(2\sqrt{5}, \sqrt{11}, -\frac{7}{9} \right)$, $b = \left(3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{11}}, 18 \right)$ باشد مطلوبست حاصل عبارت زیر:

$$(\sqrt{5}a + 3\sqrt{2}b) \cdot \left(\frac{21}{\sqrt{5}}a \times \sqrt{11}b \right) =$$



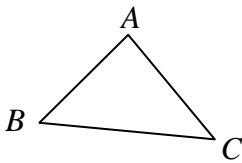
نکته:

۱۲) ضرب سه گانه برداری :

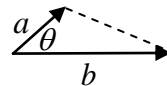
۱۳)

۱۴)

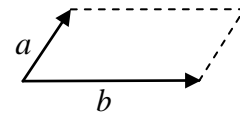
یادآوری از هندسه ۱: مساحت مثلث



۱۵) مساحت مثلث :



۱۶) مساحت متوازی الاضلاع :

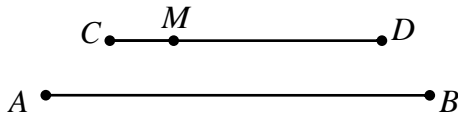
مثال ۵۱: اگر $A = (1, 2, 3)$, $B = (5, 6, 7)$, $C = (0, -1, 2)$ رأس مثلث $\triangle ABC$ باشند مطلوبست مساحت مثلث $\triangle ABC$ ؟مثال ۵۲: دو بردار a , b به طول‌های ۳ و ۴ واحد بایکدیگر زاویه 30° می‌سازند مساحت مثلثی که بر رویدو بردار $a - 2b$, $3a + 2b$ تولید می‌شود را بدست آورید؟ (سراسری ۸۴)



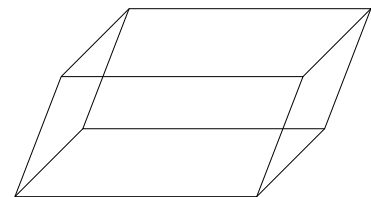
مثال ۵۳: دو بردار a ، b به طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض اند. مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه‌ی دو بردار کمتر از قائمه باشد، اندازه‌ی تفاضل دو بردار را بدست آورید؟ (سراسری ۸۱)

مثال ۵۴: در $\triangle ABC$ اگر $\vec{V} = AB \times AC + BC \times BA + CA \times BA$ مساحت مثلث باشد آن گاه $|\vec{V}|$ را بر حسب S بیابید؟ (آزاد ۶۳)

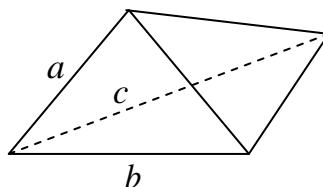
مثال ۵۵: اگر CD موازی AB باشد و نقطه‌ی M از C به D حرکت کند، بردار حاصل ضرب خارجی $AB \times AM$ چگونه تغییر می‌کند؟ (آزاد ۸۳)



حجم متوازی سطوح (۱۷):



حجم هرم (۱۸)





مثال ۵۶: حجم هرمی را که بین بردارهای a, b, c پدید می آید بدست آورید؟

$$a = (1, 2, 3) \quad b = (0, 5, -1) \quad c = (4, 0, 0)$$

۱۹)

مثال ۵۷: m را چنان بیابید که ۳ بردار a, b, c در یک صفحه واقع باشند؟

$$a = (m, 2m+1, -2)$$

$$b = (0, 4, 7)$$

$$c = (2, 0, 0)$$

۲۰)

زوایای هادی بردار:

نکته:

نکته:



مثال ۵۸: بردار a با محور ox, oy به ترتیب زوایای $120^\circ, 135^\circ$ ساخته است، مطلوبست زاویه ی آن با محور z ها؟

مثال ۵۹: اگر زاویه ی برداری با محور x ها 135° و با محور y ها 150° باشد مطلوبست زاویه ی آن با محور z ها؟

مثال ۶۰: اگر طول برداری که با محور x ها زاویه ی 120° و با محور x ها زاویه ی 45° ساخته است برابر ۸ باشد مطلوبست خود این بردار؟

مثال ۶۱: اگر $|V_1 \times V_2| = \sqrt{3}(V_1 \cdot V_2)$ زاویه ی بین دو بردار V_1, V_2 کدام است؟ (آزاد ۷۸)

$$\frac{\pi}{6} \quad (۱) \quad \frac{\pi}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{۴} \quad (۳) \quad \frac{\pi}{۲} \quad (۴)$$

مثال ۶۲: اگر $a \neq 0, b \neq c, a \times b = a \times c$ آن گاه کدام گزینه نادرست است؟ (سراسری ۷۹)

$$a \parallel b - c \quad (۲) \quad a \perp b - c \quad (۱)$$

$$a, b, c \text{ موازی یک صفحه اند.} \quad (۴) \quad a \cdot (b \times c) = 0 \quad (۳)$$



مثال ۶۳: اگر $V_1 = (-1, 1, 2)$, $V_2 = (1, -2, 3)$ باشند زاویه‌ی بردار $V_1 \times V_2$ با کدام یک از محورهای مختصات بزرگتر است؟ (آزاد ۸۳)

مثال ۶۴: اگر بردارهای V_1, V_2 بر یکدیگر عمود باشند و داشته باشیم $V_1 \times V_2 = (-6, 3, 1)$, $V_1 = (1, 1, 3)$ بردار V_2 را بدست آورید؟ (آزاد ۸۰)

مثال ۶۵: زاویه‌ی بین دو بردار a , b کمتر از 90° درجه است، $|a| = 6$, $|b| = 5$, $|a \times (a+b)| = 18$ حاصل $a \cdot (a+b)$ را بدست آورید؟ (سراسری ۸۵)

مثال ۶۶: اگر $a \times c = b \times d$, $a \times b = c \times d$ آن گاه کدام نتیجه گیری الزاماً صحیح است؟

$$(1) \quad (b+c) \parallel (a-d) \quad (2) \quad (a-d) \parallel (b-c)$$

$$(3) \quad (a-c) \parallel (b-d) \quad (4) \quad |a+b| = |c+d|$$



مثال ۶۷: سه نقطه ی A, B, C به صورت زیر مفروضند. مطلوبست مقدار m به شرط آن که ۳ نقطه بر یک خط راست واقع شوند؟

$$A(2m, m+1, -1)$$

$$B(3, 5, 7)$$

$$C(-7, 0, 1)$$

مثال ۶۸: چهارنقطه ی A, B, C, D به صورت زیر مفروضند مطلوبست مقدار m به شرط آنکه چهار نقطه بر یک صفحه واقع شوند.

$$A = (m, m-1, 2m)$$

$$B = (5, 2, 1)$$

$$C = (0, 0, -1)$$

$$D = (2, 1, 0)$$

مثال ۶۹: مکان هندسی نقاطی مانند $M = (x, y, z)$ را بیابید که $x^2 + y^2 = 0$ باشد؟

مثال ۷۰: نقطه ی $A = (1, 2, 3)$ مفروض است. مطلوبست مکان هندسی نقاطی از صفحه ی xoy که از A به فاصله ی ۱ باشد.



مثال ۷۱: در مثال ۷۰ مکان هندسی نقاطی که به فاصله ی ۳ باشند را بیابید.

مثال ۷۲: در مثال ۷۰ مکان هندسی نقاطی که به فاصله ی ۵ باشند را بیابید.

